Title	初等幾何における読みやすい証明の生成手法について
Author(s)	宮本, 健司; 関川, 浩; 白柳, 潔; 町田, 文彦
Citation	数理解析研究所講究録 (2003), 1335: 20-27
Issue Date	2003-07
URL	http://hdl.handle.net/2433/43334
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録 1335 巻 2003 年 20-27

初等幾何における読みやすい証明の生成手法について

宮本 健司
KENJI MIYAMOTO
法政大学工学部
FACULTY OF ENGINEERING,
Hosei University*

関川 浩
HIROSHI SEKIGAWA
日本電信電話株式会社
コミュニケーション科学基礎研究所
NTT COMMUNICATION SCIENCE LABORATORIES†

白柳 潔
KIYOSHI SHIRAYANAGI
日本電信電話株式会社
コミュニケーション科学基礎研究所
NTT COMMUNICATION SCIENCE LABORATORIES‡

町田 文彦
FUMIHIKO MACHIDA
法政大学工学部
FACULTY OF ENGINEERING,
Hosei University

1 はじめに

人間の創造的推論の一例として初等幾何の証明問題（幾何推論）をとりあげ、補助線を発見しながら人間的な証明を行なうメカニズム「補助線付き推論」を提案し、その高速化について報告する。

初等幾何の推論を自動的に行う方法には大きくわけて論理的方法と代数的方法がある。論理的方法は幾何の概念を述語論理により表現し、演繹により推論を行う。初期には、前向きに推論を行なう方法 ([7]) があるが、証明できるものは非常に簡単なものに限られていた。最近になって演繹データベースを用いて推論を行なう不動点法 [6] が提案された。一方、代数的方法は幾何の概念を代数として表現し、その代数演算により推論を行う。連立方程式の求解捜査で推論を行う Wu の方法 [8] 後、代数的方法はその推論能力により幾何推論の主役になっていった。幾何概念を面積やピタゴラス差分に対応させた面積法 [3] や角度に関する定理を利用して線分を消去する全角法 [5]、代数方程式に変換した Gröbner 基底法 [1] や Cylindrical Algebraic Decomposition (CAD) [2] がある。Wu の方法や Gröbner 基底法は角度など順序概念にかかわる証明能力が劣っているがこの弱点を論理的方法で補う方法も考案されている ([9])。

自動証明は人間が行うような知的な問題解決を目指しているにもかかわらず、補助線を追加するような問題は難しく、まだ人間の思考に追い付いてはいない。代数的方法の証明手段は方程式の求解操作が推論に置き換えるので、数学者が行なうような証明法とは異なる。したがって、われわれがその証明過程を知りたときはその求解操作を追う必要があり生成される証明は難解である。一方、論理的方法で用いる述語論理は高次の概念を記述、推論が可能であり、その証明はより短くわかりやすいものになる可能性がある。しかしながら、不動点法は証明の全探索に頼りその手法は極めて機械的である。上で述べたアプローチでは必ず証

*miyaken@k.hosei.ac.jp
†sekigawa@theory.brl.ntt.co.jp
‡shirayan@theory.brl.ntt.co.jp

明が出来るということだけに重きを置いており、証明の過程や出力の可読性は後回しにされることが多かった。これに対して実際の人間の推論は、知識に基づく大胆な刈り込み、一瞬で証明を行い、独創的な定理を証明することもできる。

本研究では、補助線の導入を含めた推論規則を利用度に応じて適用することで効果的な補助線を発見するメカニズムを提案する。また、人間の刈り込みのメカニズムを明らかにし、創造的でより高度な問題解決システムの構築を目指す。

補助線付き推論は十分に短くわかりやすい証明が得られた。また、絞り込みの導入により探索時間は導入前のおよそ半分、ステップ数は最高で約6分の1程になった。

有効な補助線を引くことは非常に創造的な発見である。絞り込みという操作は人間が素早く結論を得るためにいつもしている行為であるので、非常に人間的といえる。補助線発見のメカニズムは幾何推論をケーススタディとして独創性や創造活動の解明の糸口になると期待される。

2 補助線付き推論

補助線付き推論は仮定から推論を行なう前向き推論の一種で、人間が普段使用するような高次の推論規則を用いて推論を行なう。この章では、幾何学的関係の表現方法と推論規則の詳細および証明の構成について述べる。

2.1 幾何学的関係の表現

図形における幾何学的関係は表1に示す述語によって表される**事実**の集合によって表される。

表 1: 幾何概念の記述

表現	意味
point(p)	p は点である
eqlength(P1, P2, P3, P4)	P1, P2 間の距離と P3, P4 間の距離が等しい
halflength(P1, P2, P3, P4)	P1, P2 間の距離は P3, P4 間の半分である
line(line1, [a, b, c])	line1 上には、a, b, c の点がある（順序は関係無し）
parallel(line1, line2)	line1 と line2 は平行である
eqangle(line1, line2, line3, line4)	line1 と line2 のなす角と、 line3 と line4 のなす角が同じ
notparallel(line1, line2)	line1 と line2 は平行でない
noteqlength(P1, P2, P3, P4)	P1, P2 間の距離と P3, P4 間の距離が等しくない
noteqangle(line1, line2, line3, line4)	line1 と line2 のなす角と line3 line4 のなす角が等しくない

line1 とline2 のなす角とは line1 から line2 へ反時計回りに回転させ重なる角のことである。対頂角も同じ表現になる。line1 と line2 とのなす角は line2 と line1 とのなす角とは互いに補角であることに注意せよ。この定義では、「対頂角は同じ角度」という公理を暗黙に含むのでひとつの事実でふたつの角度が決まる。角度のこの表現はわれわれの取り扱う情報の記述には十分である。

2.2 推論規則

推論規則は**前提**と**帰結**と呼ぶ事実の集合の組であり、前提の中の事実が全て成り立つとき、帰結の中の事実が全て正しいことを意味する。以下で本論文で用いる各推論規則を見ていくことにする。

推論規則 *tyuten, heiko, nitohen1, nitohen2* を表 2 にまとめる。

表 2: 推論規則

推論規則	前提	帰結
tyuten	eqlength(A, B, B, C) line(Line1, [A, B, C]) line(Line2, [C, D])	point(P) line(L1, [B, P]) line(L2, [A, P, D]) eqlength(A, P, P, D) halflength(B, P, C, D) parallel(Line2, L1)
heiko	parallel(Line1, Line2) notparallel(Line1, Line3)	eqangle(Line1, Line3, Line2, Line3) eqangle(Line3, Line1, Line3, Line2)
nitohen1	eqlength(A, B, A, C) line(Line1, [A, B]) line(Line2, [A, C]) line(Line3, [B, C])	eqangle(Line3, Line1, Line2, Line3)
nitohen2	line(Line1, [A, B]) line(Line2, [A, C]) line(Line3, [B, C]) eqangle(Line3, Line1, Line2, Line3)	eqlength(A, B, A, C)

表 2 で、大文字からはじまる引数は変数であり、次に述べる適用の際に具体的な対象が代入される。

2.3 推論規則の適用

幾何的関係の事実の集合を G とする。推論規則 R の前提を Pre、帰結を Con とする。

このとき、θ を**代入**として、

$$G \supset Pre\theta$$

が成り立つとき、R は G に**適用可能**であるという。

Con に存在して Pre には含まれない変数 P を、P に関して帰結の条件をみたす点 p が G に存在するときは p に、なければ新しい点 q に置き換える代入を η とし、$\tilde{\theta} = \theta\eta$ とする。このとき、R と $\tilde{\theta}$ の組 $(R, \tilde{\theta})$ を適用と呼び、q を適用に関する**補助点**という。

$$G := G \cup Con\tilde{\theta}$$

とすることを **G に R を適用する**という。また、$\tilde{\theta}$ を R の**適用箇所**という。

2.4 証明の構成

事実の集合 G_0 から出発して、$G = G_0$ に対する規則の適用をくり返した結果、別の集合 C について、$C \subset G$ となるとき適用記録の列を **G_0 のもとでの C の証明** という。

定理自動証明は与えられた G_0 と C に対して G_0 のもとでの C の証明をみつけることにほかならない。次の章ではこの探索のアルゴリズムを見ていくことにする。

3　補助線付き推論にもとづく定理証明

証明問題において、与えられている事実をわれわれは**仮定**と呼び、証明すべき事実を**結論**と呼ぶことにする。定理証明システムは、あらかじめ与えられた仮定のもとで、結論を導き定理を証明するものである。

データベースが推論規則の前提を満たしていればその推論規則を適用し、得られた帰結をデータベースに追加する。この適用は、推論規則が適用ができる所すべてに行なわれる。すなわち、幅優先の全探索を行う。よって、推論規則のみの証明が存在すれば、証明を導出できる。

われわれは冗長な演繹を防止するためにデータベースに「世代」のサフィックスをつけることにし、世代 g のデータベースを DB_g と書くことにする。

仮定により初期化されたデータベースを世代 0 のデータベースつまり DB_0 とする。そしてアルゴリズム通りに推論規則の適用が起こり、帰結はひとつ上の世代の世代 1 の結論データベース DB_1 に入れる。そして世代をひとつ上げる。次に世代 1 においては、世代 0 のデータベースに格納されている事実もあるので適用できる推論規則の数は世代 1 と同等かそれ以上のはずである。しかしながら、その中には、世代 0 と同じ事実に、同じ推論規則を適用するものも含まれている。この世代 0 で適用したものを世代 1 でも適用するのは同じ事実を生むだけで何の意味も持たない。そのために、各推論規則の前提に現在の世代のデータベースに格納されている事実がひとつ以上含まれるようにする。そうすればこの冗長な演繹は防止できる。

また、推論規則が

$$MDB_r = \biguplus_{g=0}^{r} DB_g(\text{直和})$$

である MDB_{r-1} には適用可能でないが、MDB_r で適用可能であるとき、推論規則は r **ではじめて適用可能**という。

4　共有適用点の優先化

初等幾何の証明問題を解く場合、われわれ人間は公理が適用できるかどうかを意識的に考える。そして有効な公理の適用を、必要ならば補助線を引いて、行なう。人間の「有効な補助線をみつける」メカニズムが解明できれば、公理の適用箇所は全探索に頼らなくて済むはずである。

この章では、有効な補助点を探すメカニズムについて述べる。

4.1　共有適用点

優先的に追加すべき、有効な補助点はどのようなものであろうか？ われわれは、幾何学の公理が数多く適用できる点や、公理が適用できるようになる補助点は優先度が高いと考え、次の仮説をもうける。

仮説: 公理が重なって適用できる所は、公理を適用する有効な場所である

共有適用点とは、推論規則が重なって適用できる点のことである。推論規則が適用できる点のいくつかか、もしくはその推論規則の適用により生成される点（補助点）に「重み（優先度）」を付ける。その共有適用点の重みの大きな点に関与している推論規則から優先に適用していく。

点と重みへの寄与を表 3 にまとめる。

4.2　共有適用点を優先する証明探索アルゴリズム

上の仮説に基づいて共有適用点を優先する証明探索アルゴリズムについて述べる。

表 3: 点と重みへの寄与（点の記号は表 2 と同じ）

推論規則	点	重みへの寄与
tyuten	P	1
heiko	A	1
	B	1
nitohen1	B	1
	C	1
nitohen2	A	2

システムは推論規則の適用場所の探索を行ない、推論規則 Rule と適用箇所 $\tilde{\theta}$ を得る。次に

contrib(Rule, $\tilde{\theta}$) = 適用 $(R, \tilde{\theta})$ によって重みに寄与する点のリスト

により得られる点のリストと

score(Rule, Point) = Rule による点 Point の重みへの寄与

により、重みへの寄与が得られる。これらの Rule や $\tilde{\theta}$、重みへの寄与を表 4 に示すような**重み表**の下に順次追加する。すべての適用場所の探索が終了すると、共有適用点の重みの合計を計算する。合計の重みの大きな点から、その点の重みへの寄与がある適用箇所を上から順に適用する。このとき、「適用済み」がチェックしてあれば適用しない。推論規則を適用するとその推論規則には「適用済み」のチェックが入り二度適用されることはない。

表 4: 重み表の例

			点	a	b	c	d	e
			合計点					
推論規則	代入	適用済み	–	–	–	–	–	–
nitohen1	[b/A, c/B, e/C, l3/Line1, l2/Line2, l5/Line3]		–			+1		+1
:	:	:	:	:	:	:	:	:

推論規則の適用後には結論を満しているかどうかの検査を行なう。すべての推論規則を適用後も結論を満さないときは世代をひとつ上げ、上記の作業を繰り返す。

証明探索アルゴリズム（共有適用点優先）

```
total[] を配列                     # total[Point] は点 Point の重みが入る
重み表 weight[,] を二次元配列       # weight[App,Point] は、App による点 Point の重みへの寄与
世代 g = 0, 1, 2, ... に対して
    total[] を 0 で初期化
    weight[,] を 空欄で初期化
    すべての rule ∈ Rules に対して
        rule の g ではじめて適用可能箇所 θ̃ のすべてに対して
            app=(rule, θ̃)
            X ∈ contrib(app) に対して
```

```
10.             app 行を重み表の下に追加し
                weight[app, X] = score(app, X) # 重み表の [app, X] の欄に、
                                               # score(app, X) を書き込む
11.             total[X] = total[X] + weight[app, X]
12.     total[X] が最大となる X に対して
13.         重み表の上から、空欄でない weight[APP, X] かつ、適用済みでない APP に対して
14.             APP 適用し帰結をデータベースに追加
15.             APP の適用済みにチェックを入れる
16.             データベースが結論を満しているなら証明を出力し終了
```

5 結果

中学校程度の問題について証明を見つける実験を行なった。その結果を示す。

例 1

図 1 で、AB = CD, AE = EC, BF = FD であるとき、∠ HGI = ∠ EIC であることを証明せよ.

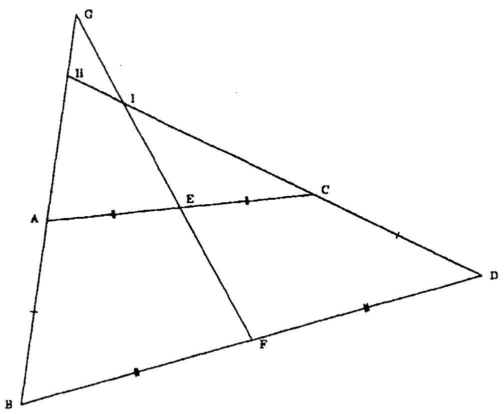

図 1: 例 1

例 1 の問題の仮定は

```
point(a)
point(b)
point(c)
point(d)
point(e)
point(f)
point(g)
point(h)
point(i)
line(line1, [b, a, h, g])
line(line2, [b, f, d])
line(line3, [f, e, i, g])
line(line4, [a, e, c])
line(line5, [d, c, i, h])
eqlength(a, b, c, d)
eqlength(a, e, e, c)
eqlength(b, f, f, d)
```

として与えた。

また、結論は

```
eqangle(line1, line3, line3, line5)
```

として与えた。

結果、生成された証明は以下のようになる。

```
0, tyuten, [d, f, b, a], [[midpoint, a, d]]
1, tyuten, [a, e, c, d], [eqlength, e, [midpoint, a, d], [length, length1, /, 2]]
2, tyuten, [d, f, b, a], [eqlength, f, [midpoint, a, d], [length, length1, /, 2]]
3, nitohen, [0, e, f, 1, 2], [eqangle, line3, [line, e, [midpoint, a, d]], [angle, line1, line3]]
4, tyuten, [a, e, c, d], [parallel, line5, [line, e, [midpoint, a, d]]]
5, heiko, [4, line3], [eqangle, [angle, line3, line5], [angle, line1, line3]]
```

これを図示すると図 2 のようになる。

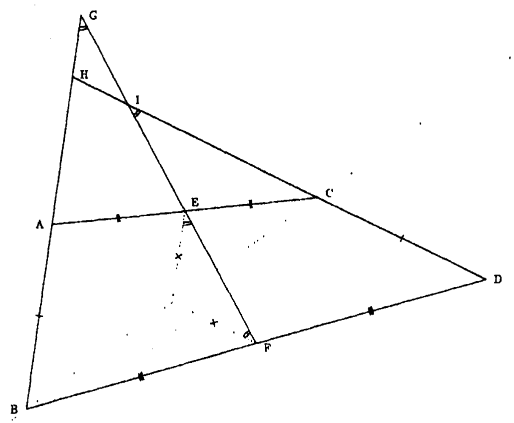

図 2: 例 1 証明

5.1 共有適用点の優先化の結果

例 1 を解くのにかかった時間、適用した推論規則数をまとめると表 5 のようになる。

表 5: 例 1 の共有適用点有効無効の比較

	かかった時間 [ms]	適用した推論規則数	証明に必要な推論規則数
共有適用点の優先化あり	63511	63	4
共有適用点の優先化なし	110328	380	4

なお、実行環境は RedHat Linux 7.1 を使用し、CPU Celeron 700MHz, メモリ 256 Mbytes である。GNU Prolog バージョン 1.2.13 で実装した。

共有適用点を優先した結果、証明にかかった時間はおよそ半分になり、適用した推論規則数はおよそ 6 分の 1 になった。

6 議論

本報告書では人間の直感的思考の例として初等幾何をとりあげ、特に補助線発見の方法とその高速化について述べた。われわれの高速化は絞り込みよって行なわれ、絞り込みはわれわれが直感で普通に行なうものであるのであるから、直感的思考と高速化には密接なつながりがある。

網羅的な探索法であるので推論規則だけを使った証明が存在すれば必ず証明が導出できる。しかし、補助線の能力は問題に依存しやすい。Geometry Expert (GEX) [4] で実装されている不動点法は、補助線（補助点）の追加ということでは非常に似ており、出力する証明は同じになる。しかし、不動点法は補助点導入は再帰的には行なわれなく（われわれの用語では世代 0 のみである)、補助点導入規則の前提が強すぎるという点が本研究との違いである。また、われわれのような共有適用点の重み付けによるメカニズムを持たない。GEX で実装されている不動点法では例 1 は解けなかった。

本研究は創造的思考として初等幾何をとりあげたが、利用度による枝刈りは幾何分野の知識に依存しないので他の分野での応用も期待できる。

参 考 文 献

[1] Bruno Buchberger. Gröbner bases: An algorithmic method in polynomial ideal theory. *D. Reidel Publisher.*

[2] George E. Collins. Quantifier elimination for real closed fields by cylindrical algebraic decomposition. *Lecture Note in Computer Science 33*, pp.134–183, Springer, 1975.

[3] Shang-Ching Chou, Xiao-Shan Gao, and Jing-Zhong Zhang. Automated Production of Traditional Proofs for Constructive Geometry Theorems. *Proc. of Eighth IEEE Symposium on Logic in Computer Science*, pp. 48–56, 1993.

[4] Shang-Ching Chou, Xiao-Shan Gao, and Jing-Zhong Zhang. An introduction to Geometry Expert. *Proceedings of 13th International Conference on Automated Deduction*, pp. 235–244, 1996.

[5] Shang-Ching Chou, Xiao-Shan Gao, and Jing-Zhong Zhang. Automated generation of readable proofs with geometric invariants, II: Proving theorems with full-angles. *Journal of Automated Reasoning*, Vol. 17, pp. 349–379, 1996.

[6] Shang-Ching Chou, Xiao-Shan Gao, and Jing-Zhong Zhang. A decuctive database approach to automated geometry theorem proving and discovering. *Journal of Automated Reasoning*, Vol. 25, pp. 219–246, 2000.

[7] Arthur J. Nevins. Plane geometry theorem proving using forward chaining. *Artificial Intelligence*, Vol. 6, pp. 1–23, 1975.

[8] Wen-Tsun Wu. On the decision problem and the mechanization of theorem-proving in elementrary geometry. *Scientia Sinica*, Vol. 21, No. 2, pp. 159–172, 1978.

[9] 松山隆司, 新田知明. 論理的推論と代数的推論の融合による幾何推論. 人工知能学会誌, Vol. 8, No. 3, pp. 336–347, 1992.